Progressão Geométrica e Função Modular

CEAB - 1º Ano

Progressão Geométrica P.G.

Denomina-se progressão geométrica (PG) qualquer sequência numérica na qual o quociente entre cada termo e o anterior é constante.

O quociente constante recebe o nome de razão, que indicamos com a letra q.

Exemplos:

* (2, 4, 8, 16, ...)

$$q = \frac{4}{2} = 2$$

* (1 000, 800, 640, 512, ...)

$$q = \frac{800}{1000} = 0{,}8$$

Termo Geral da P.G.

A fórmula do termo geral de uma PG é dada por:

$$an = a1 * q^{n-1}$$

Exemplo:

Qual é o valor do décimo termo da P.G. (5, 15, 45...)?

$an = a10$

$a1 = 5$

$q = \frac{15}{5} = 3$

$n = 10$

$a10 = 5 * 3^{10-1}$

$a10 = 5 * 3^{9}$

$a10 = 5 * 19\ 683$

$$\boxed{a10 = 98\ 415}$$

Interpolação Geométrica

Inserir termos entre dois outros de maneira que a sequência formada seja uma PG é um procedimento denominado interpolação geométrica. Chamamos os termos inseridos (interpolados) de meios geométricos.

Exemplo: Entre $\frac{1}{8}$ e 8 são interpolados 5 meios geométricos. Escreva a PG formada.

Como são inseridos 5 termos, a PG terá um total de 7 termos.

$an = a7$

$a7 = 8$

$a1 = \frac{1}{8}$

$q = ?$

$an = a1 * q^{n-1}$

$a7 = \frac{1}{8} * q^{7-1}$

$\frac{8}{1} = \frac{1}{8} * q^6$

$64 = q^6$

$q = \sqrt[6]{64}$

$\boxed{q = \pm 2}$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	2

$q = 2 \rightarrow \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right)$

$q = -2 \rightarrow \left(\frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8\right)$

Soma dos n Primeiros Termos de uma PG

A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}, \text{ sendo } q \neq 1$$

Exemplo: A quantidade total de grãos de trigo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica (1, 2, 4, ...).
Qual é a soma dos termos da PG (7,14,28, ... , 3584)?

$a1 = 7$

$an = 3584$

$q = \frac{14}{7} = 2$

$n = ?$

$Sn = ?$

$$Sn = \frac{a1 - an * q}{1 - q}$$

$$Sn = \frac{7 - 3584 * 2}{1 - 2}$$

$$Sn = \frac{7 - 7168}{-1}$$

$$Sn = \frac{-7161}{-1} \longrightarrow \boxed{Sn = 7161}$$

Módulo de um Número Real

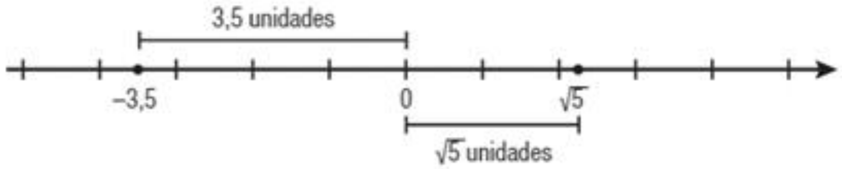
Dado um número real x, o módulo ou valor absoluto de x é representado por |x| e definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

- $|7| = 7$
- $|0| = 0$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $\left|-\frac{3}{5}\right| = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$
- $|0{,}75| = 0{,}75$
- $|-\sqrt{5}| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

Na reta real, o módulo de um número real qualquer corresponde à distância entre o ponto associado a esse número e a origem.



$|-3{,}5| = 3{,}5$ (a distância entre o ponto associado a $-3{,}5$ e a origem é 3,5).

$|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$ (a distância entre o ponto associado a $\sqrt{5}$ e a origem é $\sqrt{5}$).

Equações Modulares

Toda equação que apresenta a incógnita em um módulo é uma equação modular.

Exemplo: Resolva as Equações Modulares:

- $|x^2 - 8x + 11| = 4$

Existem dois números cujo módulo é igual a 4.

$|x^2 - 8x + 11| = 4$ ou $|x^2 - 8x + 11| = -4$

Resolvendo a Função Quadrática:

$$x^2 - 8x + 11 = 4 \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 7 \end{cases}$$

$$x^2 - 8x + 11 = -4 \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = 5 \end{cases}$$

$\boxed{S = \{1, 3, 5, 7\}}$

- $|2x - 9| = 3x - 4$

$|2x - 9| = 3x - 4$ ou $|2x - 9| = -(3x - 4)$

$2x - 9 = 3x - 4$

$2x - 3x = -4 + 9$

$x = -5$

$2x - 9 = -3x + 4$

$2x + 3x = 4 + 9$

$x = \frac{13}{5}$

Aplicar condição de existência:

$3x - 4 \geq 0$

$3x \geq 4$

$x \geq \frac{4}{3}$

Como $-5 < \frac{4}{3} < \frac{13}{5}$

$\boxed{\text{Então: } S = \{13/5\}}$

Exemplos

Calcule o valor de:

a) $|4|+|-7|-|-3|$

b) $|8-|-2||$

c) $\left|\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{3}-2\right|-\frac{2}{3}\right|$

d) Para quais valores de x temos que |x| = 5?

a)
$$4+7-3$$
$$11-3$$
$$\boxed{8}$$

b)
$$|8-2|$$
$$|6|$$
$$\boxed{6}$$

c)
$$\left|\frac{1}{2}-\left|\left|\frac{1}{3}-2\right|-\frac{2}{3}\right|\right|$$
$$\left|\frac{1}{2}-\left|\left|\frac{1-6}{3}\right|-\frac{2}{3}\right|\right|$$
$$\left|\frac{1}{2}-\left|\left|\frac{-5}{3}\right|-\frac{2}{3}\right|\right|$$
$$\left|\frac{1}{2}-\left|\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right|\right|$$
$$\left|\frac{1}{2}-\left|\frac{3}{3}\right|\right|$$
$$\left|\frac{1}{2}-|1|\right|$$
$$\left|\frac{1-2}{2}\right|$$
$$\left|\frac{-1}{2}\right| \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$$

d) Como o módulo de um número corresponde à distância entre o ponto da reta a ele associado e a origem, existem dois números que distam 5 unidades da origem: 5 e –5. Portanto, |x| = 5 para $\boxed{x = 5 \text{ ou } x = -5.}$

Exercícios de P.G.

Apostila Volume 4 – Pág: 33

1) Identifique as sequências que são progressões geométricas e calcule a razão:

a) (1, 3, 5, 7, ...)

b) (1, 3, 9, 27, ...)

c) (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)

d) (5, 5, 5, 5, ...)

e) (2, –4, 8, –16, ...)

f) $\left(10, 4, \frac{8}{5}, \frac{16}{25}, \ldots\right)$

g) (0, 1, 4, 9, 16, ...)

h) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

i) (–1, –7, –49, –343, ...)

3) Em uma progressão geométrica, o primeiro termo é 7 e a razão é 2.

a) Escreva a fórmula do termo geral.
b) Determine o valor do oitavo termo.
c) O número 5 376 é um dos termos dessa PG?

4) Em uma progressão geométrica, o terceiro e o sétimo termos valem, respectivamente, 4 e $\frac{64}{81}$.

a) Calcule a razão.
b) Determine o quinto termo.

Exercícios de P.G.

Apostila Volume 4 – Pág: 36

1) Assinale V se a afirmação for verdadeira e F se for falsa.

a) ( ) Interpolando-se quatro meios geométricos entre $\frac{1}{25}$ e 125, a razão da PG formada é 5.

b) ( ) Interpolando-se três meios geométricos entre 256 e 16 a razão da PG formada é $\frac{1}{2}$.

c) ( ) Inserindo-se **k** números entre 2 e 1 458, obtém-se uma progressão geométrica de razão 3. O valor de k é 7.

d) ( ) Inserindo 9 meios geométricos entre **x** e **y**, obtém-se uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Assim, $\frac{x}{y} = 1\,024$.

e) ( ) Interpolando-se 100 meios geométricos entre 10^{-3} e 10^{300}, obtém-se uma progressão geométrica cujo segundo termo é 1.

Exercícios de P.G.

Apostila Volume 4 – Pág: 37

2) No ano de 2010, foram registrados no Brasil 972 casos de um novo tipo de gripe. Com o desenvolvimento de uma vacina, no ano de 2015, o número de casos foi de apenas 4. Admitindo que os números de casos registrados a cada ano, de 2010 a 2015, formam uma progressão geométrica, calcule o total de casos dessa gripe durante todo o período.

Apostila Volume 4 – Pág: 40

1) Calcule a soma dos 8 primeiros termos da PG (2, 6, 18, ...).

Exercícios de Função Modular

Apostila Volume 4 – Pág: 61

2) Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $|1-6|+|2-4|$

b) $\left|-\frac{1}{2}-\left|\left|-\frac{3}{4}+1\right|-\left|\frac{1}{4}-2\right|\right|\right|$

c) $5-|-2|+|2-5|$

d) $z=|3-\sqrt{5}|+|2-\sqrt{5}|$

3) Escreva cada uma das expressões a seguir sem utilizar Módulo.

a) $|x-2|$

b) $|-3x+12|$

c) $|x^2-81|$

d) $|-x^2-x+2|$

4) Calcule o valor de $|x-y| + |y-z|$ com base na reta real representada a seguir.

Exercícios de Função Modular

Apostila Volume 4 – Pág: 69

3) Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|x-1|=4$

b) $|x+3|=7$

c) $|4-x|=5+2x$

d) $|x+3|=|3x-1|$

e) $|x-5|=2x-4$

f) $|x|^2-6\cdot|x|+8=0$

g) $|x-3|^2+|x-3|-6=0$

h) $|x^2-3x+1|=6+x$

- Os exercícios deverão ser feitos na apostila, caso não possua, continue resolvendo no caderno;

- Não precisa copiar a explicação, se desejar, faça um resumo;

- Não fique com dúvidas, entre em contato pelo Whatsapp: (21) 9 9461-3788 ou por email: camillamat96@gmail.com.

Bons Estudos!