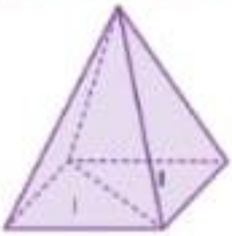
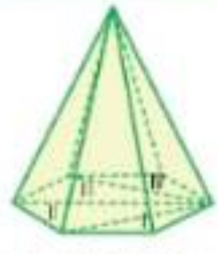
Desse modo, fica claro que o volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do volume do prisma triangular de mesma base e de mesma altura.

$$V_I = V_{II} = V_{III} = \frac{V_{prisma}}{3}$$

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

É possível estender esse resultado para pirâmides com bases em outros formatos, uma vez que um polígono pode ser decomposto em **n** triângulos justapostos que servirão de base para as **n** pirâmides triangulares assim formadas. Observe:

Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal
		
Duas pirâmides triangulares	Três pirâmides triangulares	Quatro pirâmides triangulares

Tomando como exemplo a pirâmide de base quadrangular cujo volume é igual à soma dos volumes das pirâmides de bases I e II triangulares:

$$V_{\text{pirâmide quadrangular}} = V_I + V_{II} = \frac{1}{3} \cdot A_I \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_{II} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (A_I + A_{II}) \cdot h$$

$$A_I + A_{II} = A_B \Rightarrow V_{\text{pirâmide quadrangular}} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

Para todas as pirâmides, é possível afirmar que:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

Atividades

9 Gabaritos

1. Qual é o volume de uma pirâmide hexagonal regular de altura 20 cm e com arestas da base medindo 10 cm? (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$)

$A_B = 6 \cdot \dfrac{10 \cdot \dfrac{10\sqrt{3}}{2}}{2}$

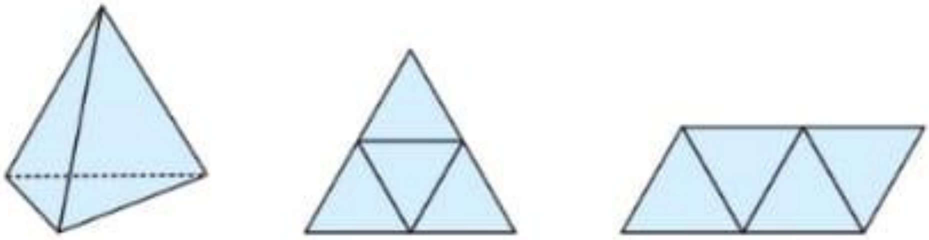
$A_B = 150\sqrt{3} = 150 \cdot 1{,}73 = 259{,}5\ cm^2$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 259{,}5 \cdot 20$

$V = 1730\ cm^3$

Área da superfície de uma pirâmide

O **tetraedro regular**, que você estudou anteriormente, é um exemplo das pirâmides regulares. São 4 faces, todas congruentes, no formato de triângulo equilátero. Observe, na figura abaixo, um tetraedro regular e suas duas possibilidades de planificação.

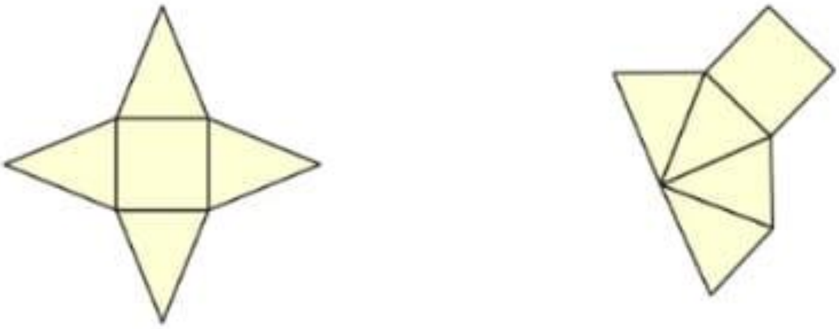


Com base em uma planificação, podemos elaborar um raciocínio que possibilite calcular a área A_T da superfície total de uma pirâmide. Nesse caso, são 4 triângulos equiláteros congruentes.

$$A_T = 4 \cdot A_{\text{triângulo}}$$

A área dos triângulos pode ser calculada de diversos modos, e a escolha vai depender dos elementos conhecidos.

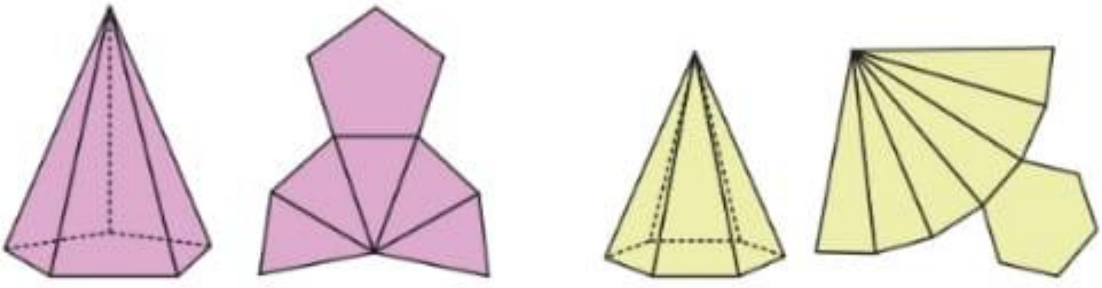
Uma pirâmide de base quadrada pode ser planificada de diversas formas. Observe estes dois exemplos:



A área A_T da superfície total desse tipo de pirâmide é obtida somando a área da base (A_{quadrado}) com as áreas A_t dos triângulos isósceles da superfície lateral.

$$A_T = A_{\text{quadrado}} + 4 \cdot A_t$$

Para pirâmides regulares com outros polígonos na base, o raciocínio é análogo: uma pirâmide de base pentagonal terá cinco triângulos isósceles na superfície lateral, uma de base hexagonal terá seis, e assim por diante.



$A_T = A_{\text{pentágono}} + 5 \cdot A_{\text{triângulo}}$ $\qquad$ $A_T = A_{\text{hexágono}} + 6 \cdot A_{\text{triângulo}}$

Além dos elementos apresentados, há outros segmentos importantes para as pirâmides regulares, que é, essencialmente, o que estudaremos aqui.

Pirâmide

Há monumentos e construções no mundo todo que têm formato de pirâmide. Exemplos muito conhecidos são a pirâmide do Museu do Louvre e as pirâmides do Egito.

As pirâmides são sólidos geométricos que têm as seguintes características:

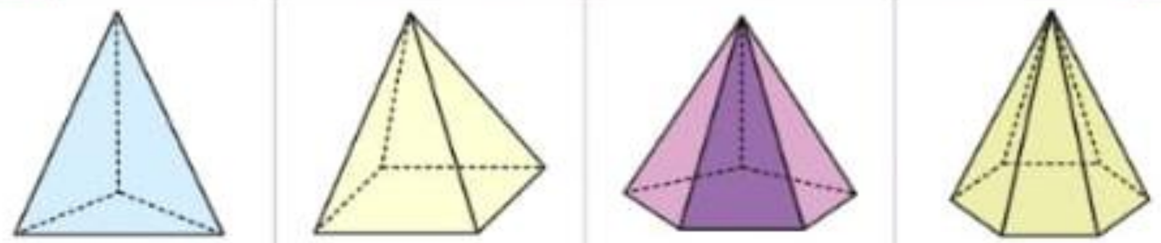
- uma base em formato poligonal oposta a um vértice **V**;
- superfície lateral fechada por faces triangulares que se juntam no vértice **V**.

Pirâmide reta

Pirâmide oblíqua

Quando a projeção ortogonal do vértice é o centro do polígono da base, dizemos que a pirâmide é reta. Quando é qualquer outro ponto do plano da base, a pirâmide é oblíqua.

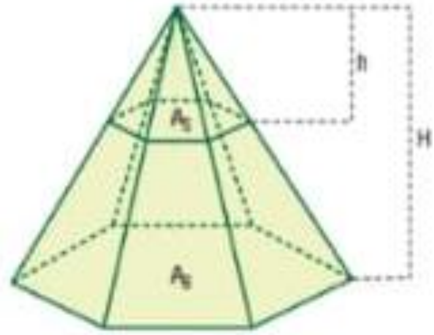
A nomenclatura das pirâmides é feita com base no número de lados do polígono que forma a base.



Pirâmide triangular | Pirâmide quadrangular | Pirâmide pentagonal | Pirâmide hexagonal

Assim como os prismas, as pirâmides podem ser regulares. São assim denominadas as pirâmides retas cujas bases são polígonos regulares. As faces laterais de uma pirâmide desse tipo são triângulos isósceles congruentes. Neste estudo, daremos ênfase às pirâmides regulares.

Volume de uma pirâmide

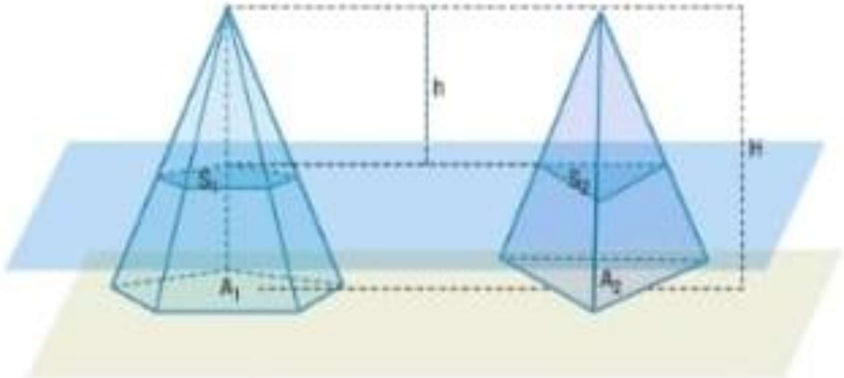


Inicialmente, vamos apresentar duas propriedades das pirâmides.

1. A razão entre a área da base da pirâmide maior A_B e a da seção transversal A_s (base da pirâmide menor) é igual ao quadrado da razão entre a altura **H** da pirâmide maior e a altura **h** da pirâmide menor.

$$\frac{A_B}{A_s} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$$

2. Se duas pirâmides têm bases com áreas iguais e mesma altura, elas têm o mesmo volume.



- $A_1 = A_2$
- **H** é a altura das duas pirâmides.
- **h** é a altura das duas pirâmides menores formadas pelas seções de áreas S_1 e S_2.

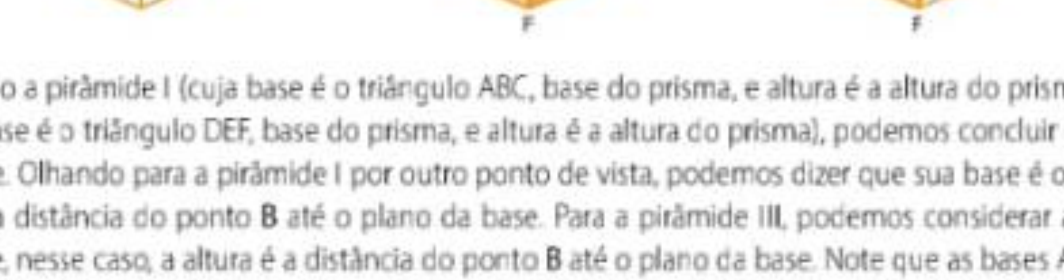
Assim, usando a propriedade 1, podemos escrever:

$$\frac{A_1}{S_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow A_1 = S_1 \cdot \left(\frac{H}{h}\right)^2$$

$$\frac{A_2}{S_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow A_2 = S_2 \cdot \left(\frac{H}{h}\right)^2$$

Uma vez que $A_1 = A_2$, podemos concluir que as áreas S_1 e S_2 das seções são iguais. Então, pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que as duas pirâmides têm mesmo volume.

Veja como obter três pirâmides de mesmo volume a partir de um prisma triangular.



Comparando a pirâmide I (cuja base é o triângulo ABC, base do prisma, e altura é a altura do prisma) com a pirâmide II (cuja base é o triângulo DEF, base do prisma, e altura é a altura do prisma), podemos concluir que elas têm o mesmo volume. Olhando para a pirâmide I por outro ponto de vista, podemos dizer que sua base é o triângulo ACD e sua altura é a distância do ponto **B** até o plano da base. Para a pirâmide III, podemos considerar a base como o triângulo CDF e, nesse caso, a altura é a distância do ponto **B** até o plano da base. Note que as bases ACD e CDF têm mesma área, pois são as duas metades de um mesmo paralelogramo e ambas as pirâmides têm mesma altura. Assim, é possível afirmar que as pirâmides I e III têm mesmo volume, que é igual ao da pirâmide II.