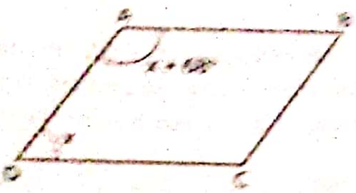
Exemplo 3

Calcule a medida dos ângulos internos de um paralelogramo, sabendo que a diferença entre dois de seus ângulos consecutivos é igual a 68°.



Ângulo menor $\rightarrow x$

Ângulo maior $\rightarrow x + 68°$

Os ângulos consecutivos são suplementares, portanto:

$x + x + 68° = 180° \rightarrow 2x = 180° - 68°$

$2x = 112°$

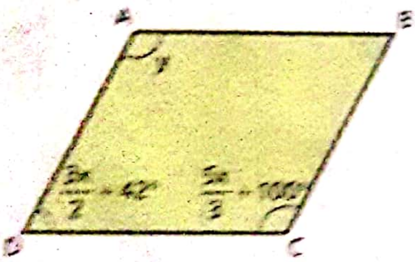
$$x = \frac{112°}{2} = 56°$$

Portanto, $x + 68° = 56° + 68° = 124°$.

Os ângulos agudos do paralelogramo medem 56°; e os obtusos, 124°.

atividades

1 O quadrilátero a seguir é um paralelogramo. Determine os valores de x e de y e as medidas dos ângulos assinalados.



$\frac{3x}{2} + 42° + \frac{5x}{3} + 100° = 180°$

$\frac{9x + 252° + 10x + 600°}{6} = 180°$

$19x + 852° = 1080°$

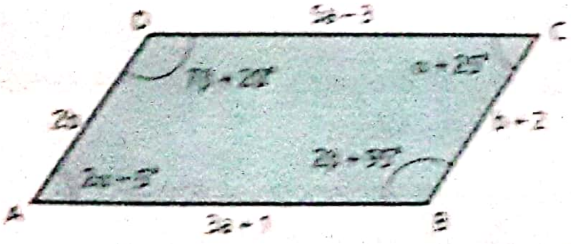
$19x = 228° \rightarrow x = 12°$

Portanto:

$y = \frac{5 \cdot 12°}{3} + 100° \rightarrow y = 120°$

Os ângulos medem 60° e 120°.

2 No paralelogramo ABCD, as medidas são dadas em centímetros, e os ângulos, em graus. Determine as medidas de seus lados e as medidas de seus ângulos internos.



$5a - 3 = 3a + 1 \rightarrow a = 2$, logo, $\overline{AB} = \overline{DC} = 7$ cm.

$2b = b + 2 \rightarrow b = 2$ cm, logo, os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ medem 4 cm.

$2\alpha - 5° = \alpha + 25°$

$\alpha = 30°$

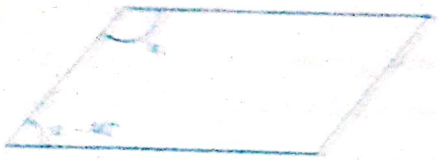
Os ângulos A e C medem 55°.

$7\beta + 20° = 2\beta + 95°$

$\beta = 15°$

Os ângulos B e D medem 125°.

3 A diferença entre as medidas de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é 40°. Calcule as medidas dos ângulos internos desse paralelogramo.

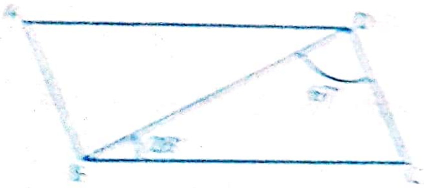


$x + x - 40° = 180° \rightarrow 2x = 180° + 40°$

$x = \frac{220°}{2} = 110°$ e $x - 40° = 110° - 40° = 70°$

Os ângulos internos desse paralelogramo medem 70°, 70°, 110° e 110°.

4 Em um paralelogramo ABCD, a diagonal $\overline{BD}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de 28° e com o lado $\overline{DC}$ um ângulo de 67°. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.



Considerando o triângulo BCD, temos:

$m(B\hat{C}D) = 180° - 67° - 28° = 85°$

$m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = 85°$

Os ângulos A e B são suplementares, então:

$m(\hat{B}) + 85° = 180° \rightarrow m(\hat{B}) = 95°$

Portanto, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ medem 95° cada um.

5 Determine a medida dos lados de um paralelogramo, sabendo que seu perímetro é igual a 84 cm e que o lado menor representa $\frac{2}{5}$ do lado maior.

$a + a + \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}a = 84$

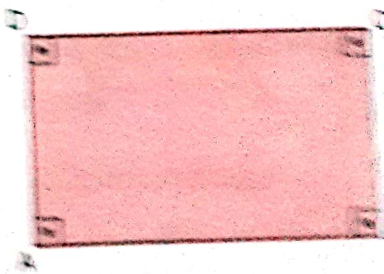
$5a + 5a + 2a + 2a = 420$

$14a = 420$

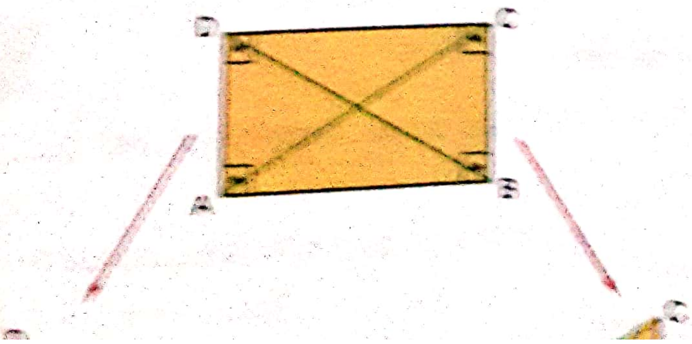
$a = 30$

O maior lado mede 30 cm e o menor mede 12 cm.

Propriedades dos retângulos



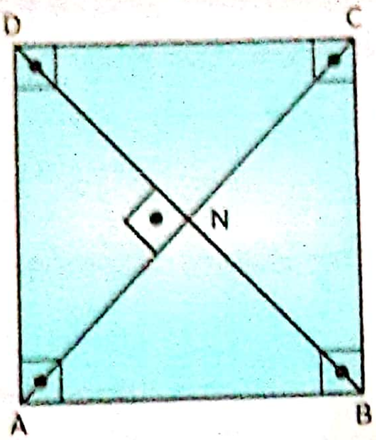
Definimos retângulo como um paralelogramo que tem os ângulos internos congruentes.



Traçando as diagonais do retângulo ABCD, podemos destacar os triângulos ABD e BAC.

Em um quadrado:

- os lados são congruentes, e os lados opostos, paralelos;
- os ângulos são congruentes (ângulos retos);
- as diagonais são congruentes, estão contidas nas respectivas bissetrizes dos ângulos internos, intersectam-se no ponto médio e são perpendiculares entre si.



$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 90°$

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{DC} \cong \overline{AD}$

$\overline{DN} \cong \overline{NB} \cong \overline{AN} \cong \overline{NC}$

$\overline{DB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{DB} \perp \overline{AC}$

atividades

1 Somando-se os ângulos agudos de um paralelogramo, obtém-se a medida de 76°. Quanto mede cada ângulo interno desse paralelogramo?

$x + x = 76°$

$2x = 76°$

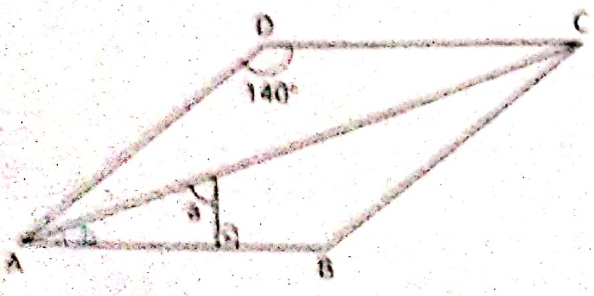
$x = 38°$

$180° - 38° = 142°$

$y = 142°$

Os ângulos internos do paralelogramo medem 142° e 38°.

2 Na figura, ABCD é um losango. Determine a medida do ângulo â.



$2b + 140° = 180°$

$2b = 40°$

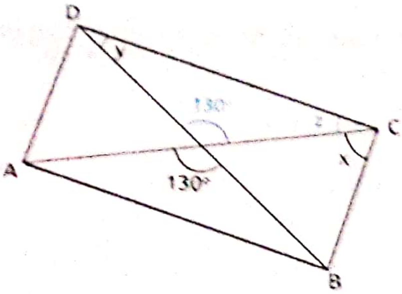
$b = 20°$

$a + b + 90° = 180°$

$a + 20° + 90° = 180°$

$a = 70°$

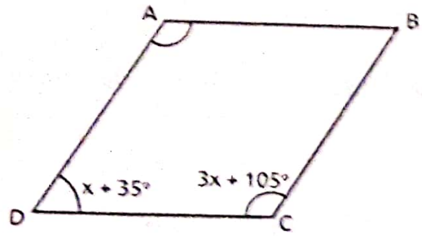
3 Sendo ABCD um retângulo, determine x + y.



$y + z + 130° = 180°$
$y = z$
$z + z + 130° = 180°$
$2z = 50°$
$z = y = 25°$

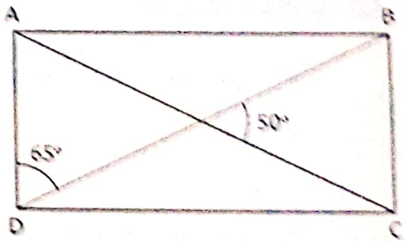
$x + z = 90°$
$x + 25° = 90°$
$x = 65°$

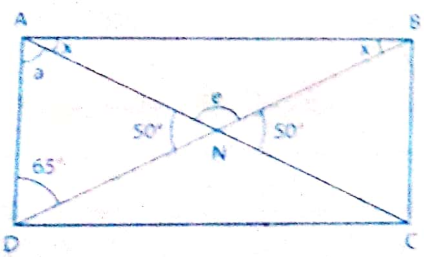
4 Sendo ABCD um losango, calcule a medida de seus ângulos.



$x + 35° + 3x + 105° = 180°$
$4x = 180° - 140°$
$4x = 40°$
$x = 10°$
$\hat{B} = \hat{D} \rightarrow x + 35° = 10° + 35° = 45°$
$\hat{A} = \hat{C} \rightarrow 3x + 105° = 3 \cdot 10° + 105° = 135°$

5 Na figura ao lado, ABCD é um paralelogramo. Comprove, por meio de cálculos, que esse paralelogramo é um retângulo.





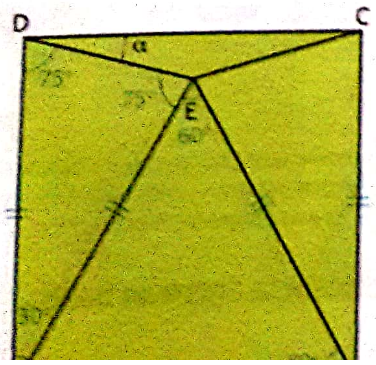
$a = 65°$ (o triângulo ADN é isósceles)
$e + 50° = 180°$ (ângulos suplementares)
$e = 130°$
$2x + 130° = 180°$
$2x = 50°$
$x = 25°$
med $(\hat{A}) = 65° + 25° = 90°$
Conclui-se que o paralelogramo é um retângulo.

6 (UERJ) Se um polígono tem todos os lados iguais, então todos os seus ângulos internos são iguais. Para mostrar que essa proposição é falsa, pode-se usar como exemplo a figura denominada:

x **a)** losango **b)** trapézio **c)** retângulo **d)** quadrado

O losango tem todos os lados de mesma medida, mas os ângulos internos não são iguais.

7 Na figura a seguir, ABCD corresponde a um quadrado, e ABE, a um triângulo equilátero. Determine o valor de α.



O triângulo AEB é equilátero. Portanto, os lados são congruentes e os ângulos também (medem 60° cada um). Em consequência, os triângulos AED e BEC são isósceles.

O ângulo A mede 90°; portanto, 90° − 60° = 30°. Assim, os ângulos da base do triângulo AED medem $\frac{180° - 30°}{2} = \frac{150°}{2} = 75°$ cada um.

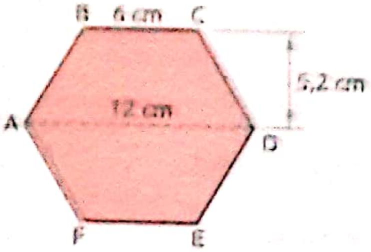
No quadrado, o ângulo D mede 90°.

Portanto, $\alpha = 90° - 75° = 15°$

atividades

1 Determine a área dos polígonos regulares a seguir.

a)

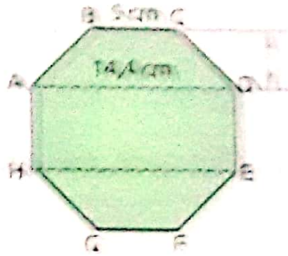


$A_T = \frac{(6+12)\cdot 5,2}{2}$

$A_T = \frac{18\cdot 5,2}{2} = 46,8$

$A_{Hexágono} = 2\cdot 46,8 = 93,6\ cm^2$

b)



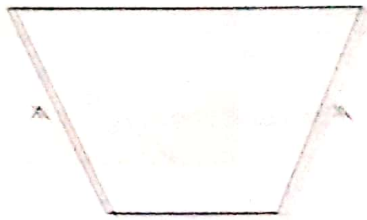
$A_{Octógono} = 2A_T + A_{Retângulo}$

$A_{Retângulo} = 5\cdot 14,4 = 72\ cm^2$

$2\cdot A_T = 2\cdot\frac{(5+14,4)\cdot 3,6}{2} = 69,84\ cm^2$

$A_{Octógono} = 72 + 69,84 = 141,84\ cm^2$

2 A base maior do trapézio isósceles ao lado mede 24 cm, e a base menor, 8 cm.



Considerando essas informações, faça o que se pede.

a) Sabendo que o perímetro é 52 cm, calcule a medida de x.

$24 + 8 + 2x = 52 \rightarrow x = 10\ cm$

b) Sabendo que a altura mede 6 cm, calcule a área do trapézio.

$A_T = \frac{(24+8)\cdot \cancel{6}}{\cancel{2}} = 32\cdot 3 = 96\ cm^2$

3 As medidas das bases de um trapézio ABCD são AB = 80 cm e CD = 60 cm, e sua altura mede 40 cm. Determine a área desse trapézio.

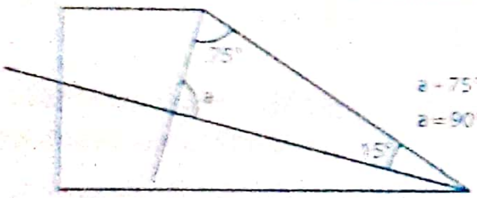
$A_T = \frac{(80+60)\cdot \cancel{40}}{\cancel{2}} = 140\cdot 20 = 2800\ cm^2$

4 Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que tem dois ângulos retos, um ângulo agudo β e um ângulo obtuso α. Considere que a medida de α é igual a cinco vezes a medida de β.

a) Calcule a medida de α em graus.

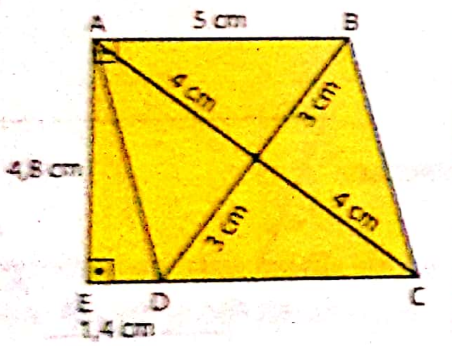
$\alpha + \beta = 180°$. Como $\alpha = 5\beta$
$5\beta + \beta = 180°$
$\beta = 30°$
Logo $\alpha = 150°$

b) Calcule o ângulo formado pelo encontro das bissetrizes dos ângulos α e β.



$a + 75° + 15° = 180°$
$a = 90°$

5 No desenho a seguir, determine as áreas do triângulo AED, do losango ABCD e do trapézio ABCE.



$A_{AED} = \dfrac{1{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = 3{,}36\ cm^2$

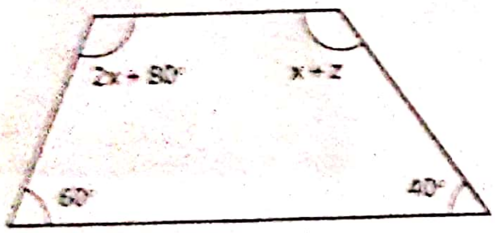
$A_{ABCD} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2$

$A_{ABCE} = \dfrac{(5 + 6{,}4) \cdot 4{,}8}{2} = 27{,}36\ cm^2$

ou

$A_{ABCE} = A_{AED} + A_{ABCD} = 3{,}36 + 24 = 27{,}36\ cm^2$

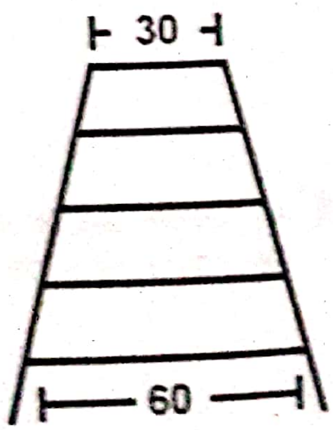
6 Determine as medidas dos ângulos desconhecidos do trapézio a seguir.



$2x + 80° + 60° = 180°$
$2x = 180° - 140°$
$2x = 40°$
$x = 20° \rightarrow 2x + 80° = 2 \cdot 20° + 80° = 120°$

$x + z + 40° = 180°$
$20° + z + 40° = 180°$
$z = 180° - 60°$
$z = 120° \rightarrow x + z = 140°$

7 (ENEM) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

a) 144.
b) 180.
c) 210.
d) 225.
e) 240.

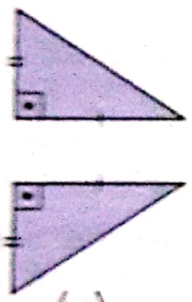
o que já conquistei

1 (UEL – PR) Sabe-se que dois lados de um triângulo medem 5 cm e 8 cm, e o comprimento do terceiro lado é um número inteiro. Satisfazendo essas condições, o maior número de triângulos que podem ser construídos é:

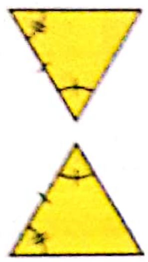
a) 5
b) 6
c) 8
x d) 9
e) 12

2 Relacione as imagens aos casos de congruência dos triângulos.

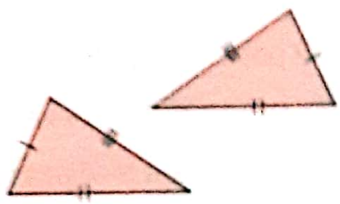
(a) ALA　(b) LAA_O　(c) LLL　(d) LAL



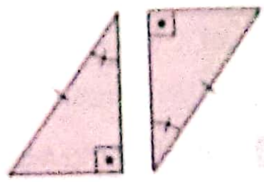
(c)



(a)



(c)



(b)

3 Com base nos conceitos relativos aos pontos notáveis de um triângulo, responda às perguntas a seguir.

a) Como se denomina a reta que passa pelo ponto médio de um segmento e é perpendicular a ele?

Mediatriz

b) Qual é o nome dado ao segmento de reta que tem uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra extremidade no ponto médio do lado oposto?

Mediana

c) Como se denomina o segmento de reta que tem uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto e que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes?

Bissetriz do ângulo interno

d) Qual é o nome dado ao segmento de reta que tem uma extremidade em um dos vértices e a outra extremidade no lado oposto a esse vértice ou em seu prolongamento, formando um ângulo de 90°?

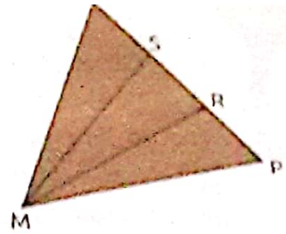
Altura

4 Relacione a primeira coluna com a segunda.

a) Ponto de intersecção das medianas.
b) Ponto de intersecção das mediatrizes.
c) Ponto de intersecção das alturas.
d) Ponto de intersecção das bissetrizes.

(c) ortocentro
(a) baricentro
(d) incentro
(b) circuncentro

5 No triângulo MNP da figura, sabe-se que $\overline{MN} \cong \overline{MP}$, $\overline{PR} \cong \overline{RS} \cong \overline{SN}$. Assinale com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas. Justifique sua resposta.



a) (v) Os triângulos MNS e MPR são congruentes.

Sim, pelo caso LAL, pois MNP é isósceles, portanto $\hat{N} \cong \hat{P}$.

b) (F) Os triângulos MNS e MSR são congruentes.

Não atendem a nenhum dos casos de congruência

c) (F) Os triângulos MPR e MSR são congruentes.

Não atendem a nenhum dos casos de congruência.

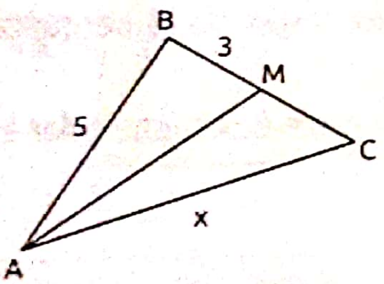
d) (v) Os triângulos MNR e MPS são congruentes.

Sim, pelo caso LAL, pois $\hat{N} \cong \hat{P}$.

e) (v) O triângulo MNP pode ser equilátero.

Sim, pois apresenta dois lados congruentes, mas não temos informações sobre o comprimento do terceiro lado.

6 No triângulo ABC, o segmento AM é a mediana relativa ao lado BC. Sabendo que o perímetro desse triângulo é igual a 19, calcule o valor de **x**.



Como $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado BC, CM = BM = 3, ou seja, o lado BC mede 6. Como o perímetro do triângulo ABC é igual a 19, temos:

$5 + 6 + x = 19$

$x = 19 - 5 - 6$

$x = 8$

7 (UFMT) Deseja-se instalar uma fábrica num lugar que seja equidistante dos municípios A, B e C. Admita que A, B e C são pontos não colineares de uma região plana e que o triângulo ABC é escaleno. Nessas condições, o ponto onde a fábrica deverá ser instalada é o:

O ponto onde a fábrica deve ser instalada é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B e C, ou seja, o circuncentro do triângulo ABC.

x a) centro da circunferência que passa por A, B e C.

b) baricentro do triângulo ABC.

c) ponto médio do segmento BC.

d) ponto médio do segmento AB.

e) ponto médio do segmento AC.

8 Um triângulo qualquer está desenhado em uma folha de papel. Se um ponto dessa folha é equidis-tante dos três lados do triângulo, ele é a intersecção de suas

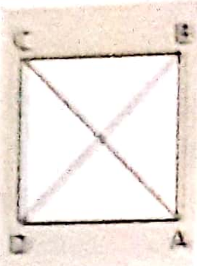
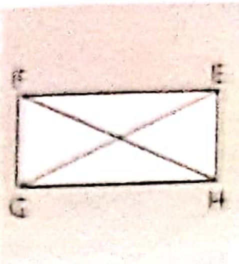
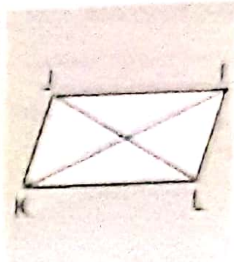
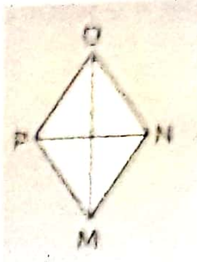
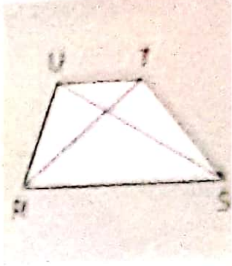
a) medianas.

b) alturas.

x c) bissetrizes.

d) mediatrizes.

9 Complete o quadro com **sim** ou **não**, de acordo com a informação

					
Todos os lados congruentes e lados opostos paralelos	sim	não	não	sim	não
Diagonais congruentes	sim	sim	não	não	não
Diagonais perpendiculares	sim	não	não	sim	não
Ângulos internos congruentes	sim	sim	não	não	não
Ângulos opostos congruentes	sim	sim	sim	sim	não
Diagonais que se intersectam no ponto médio	sim	sim	sim	sim	não

10 A medida de cada ângulo obtuso de um losango é expressa por $2x + 5°$, e a medida de cada ângulo agudo, por $x + 40°$. Determine as medidas dos quatro ângulos internos desse losango.

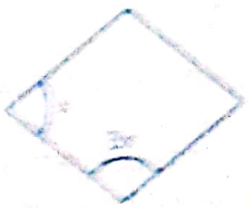
$2x + 5° + x + 40° = 180°$

$3x = 135°$

$x = 45°$

Os ângulos medem 85°, 85°, 95° e 95°.

11 Em um losango, a medida do ângulo obtuso é igual ao triplo da medida do ângulo agudo. Calcule as medidas dos ângulos desse losango.



$x + 3x = 180°$

$4x = 180°$

$x = 45°$

Os ângulos medem 45°, 45°, 135° e 135°.

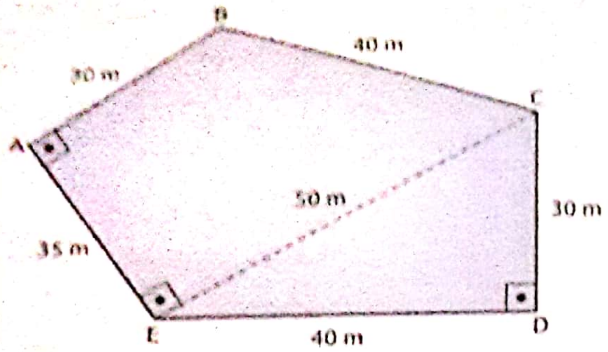
12 Sabendo que os ângulos obtusos de um losango são expressos por $x + 80°$ e $2x + 20°$, calcule as medidas dos quatro ângulos desse losango.

$x + 80° = 2x + 20°$

$x = 60°$

Os ângulos medem 140°, 140°, 40° e 40°.

13 Um terreno, correspondente à figura ABCDE a seguir, foi vendido ao preço de R$ 2.000,00 o metro quadrado. Qual é o valor do terreno?



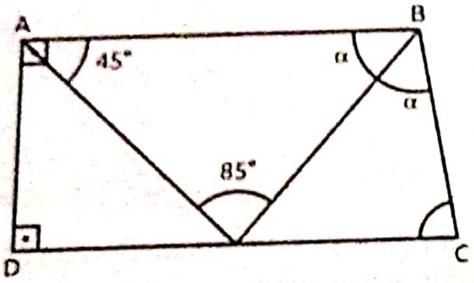
Área do terreno: $A = \dfrac{(30 + 50) \cdot 35}{2} + \dfrac{40 \cdot 30}{2}$

$A = 1\,400 + 600 = 2\,000$

Valor: $2\,000 \cdot 2\,000 = 4\,000\,000$

O valor do terreno é R$ 4.000.000,00

14 A bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz do ângulo obtuso de um trapézio retângulo um ângulo de 85°. Determine a medida de cada ângulo desse trapézio.



$\alpha + 45° + 85° = 180°$

$\alpha = 180° - 130°$

$\alpha = 50°$

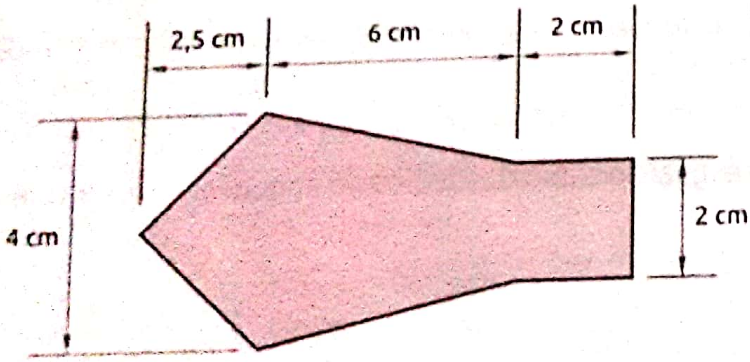
$2 \cdot 90° + 2 \cdot 50° + \beta = 360°$

$\beta = 360° - 280°$

$\beta = 80°$

Os ângulos medem 90°, 90°, 100° e 80°.

15 Calcule a área limitada pela figura plana.



$\text{Área} = \dfrac{4 \cdot 2{,}5}{2} + \dfrac{(4 + 2) \cdot 6}{2} + 2^2$

$\text{Área} = 5 + 18 + 4 = 27$

Logo, a área da figura é igual a 27 cm^2.

16 Considere uma bandeira do Brasil formada por um retângulo de lados 7,5 cm e 5 cm, que tem, no seu interior, um losango cujas diagonais medem 6,5 cm e 4 cm. Calcule a área da região verde da bandeira.

©Shutterstock/Mars-Design

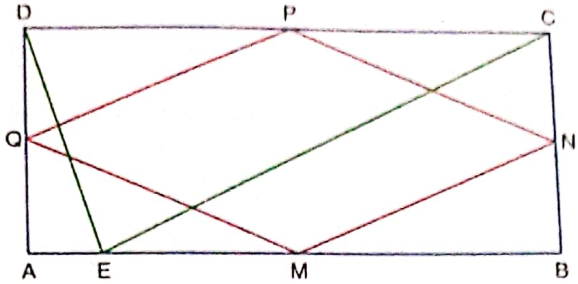
Área do retângulo = $7{,}5 \cdot 5 = 37{,}5\ cm^2$

Área do losango = $\dfrac{6{,}5 \cdot 4}{2} = 13\ cm^2$

Área verde = $37{,}5\ cm^2 - 13\ cm^2 = 24{,}5\ cm^2$

A área da superfície verde é igual a 24,5 cm^2.

17 Observe, na imagem a seguir, um retângulo, um losango cujos vértices são os pontos médios dos lados do retângulo e um triângulo.



a) Determine a razão entre a área do losango MNPQ e a área do triângulo CDE. O que é possível concluir?

Considerando $\overline{CD} = a$ e $\overline{AD} = b$, temos:

Área do triângulo: $A_t = \dfrac{a \cdot b}{2}$

Área do losango: $A_l = \dfrac{a \cdot b}{2}$

Razão: $\dfrac{\frac{a \cdot b}{2}}{\frac{a \cdot b}{2}} = 1$

É possível concluir que as áreas são iguais.

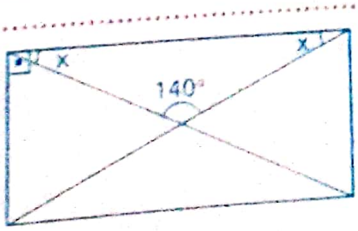
b) Qual é a razão entre a área do retângulo ABCD e a área do losango MNPQ? O que é possível concluir?

Razão entre as áreas do retângulo e do losango:

$\dfrac{a \cdot b}{\frac{a \cdot b}{2}} = (a \cdot b) \cdot \dfrac{2}{a \cdot b} = 2$

É possível concluir que a área do retângulo é o dobro da área do losango.

18 As diagonais de um retângulo formam um ângulo de 140° entre si. Calcule a medida de cada ângulo determinado pelas diagonais e pelos lados do retângulo.



$2x + 140° = 180° \rightarrow 2x = 40° \rightarrow x = 20°$

$90° - x = 90° - 20° = 70°$

Os ângulos formados entre as diagonais e os lados medem 20° e 70°.