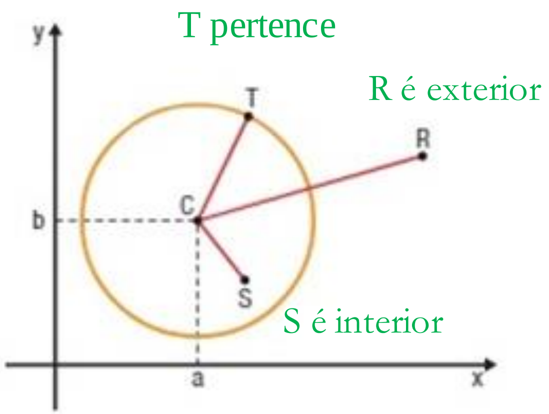
Ponto, Reta e Circunferência

Elipse

CEAB - 3º Ano

Ponto e Circunferência: Posições Relativas

Ao representarmos um ponto e uma circunferência qualquer de centro em C, á três possibilidades quanto às posições relativas que eles podem ocupar.



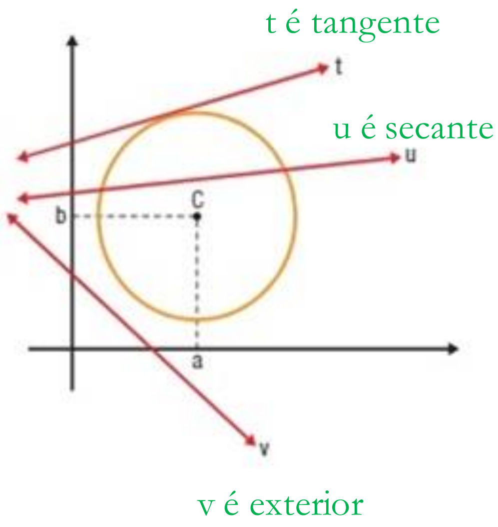
$d_{PC} = r \Rightarrow$ o ponto **P** pertence à circunferência;

$d_{PC} > r \Rightarrow$ o ponto **P** é exterior à circunferência;

$d_{PC} < r \Rightarrow$ o ponto **P** é interior à circunferência.

Reta e Circunferência: Posições Relativas

Uma reta e uma circunferência podem ter dois pontos em comum, um ponto em comum ou não ter ponto em comum.



$d = r \Rightarrow$ a reta é **tangente** à circunferência.

$d > r \Rightarrow$ a reta é **exterior** à circunferência.

$d < r \Rightarrow$ a reta é **secante** à circunferência.

Reta e Circunferência: Posições Relativas

Pode-se determinar essas posições relativas apenas pelo conhecimento das equações da circunferência e da reta, utilizando o conceito de distância de ponto a reta.
Ou resolver o sistema formado por suas equações.

Distância do Centro da Circunferência à reta: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Sistema de Equações: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases}$

1 solução = Tangente
2 soluções = Secante
0 soluções = Exterior

Exemplo

Conside a reta de equação $2x - 3y + 5 = 0$ e a circunferência de equação reduzida $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 5^2$. Qual é a posição relativa entre a reta e a circunferência?

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 5^2$$

$C(1, -4)$ e $r = 5$

$$2x - 3y + 5 = 0$$

$$d = \frac{|axo + bxo + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|2*1 + (-3)*(-4) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$d = \frac{|2 + 12 + 5|}{\sqrt{4 + 9}}$$

$$d = \frac{|19|}{\sqrt{13}}$$

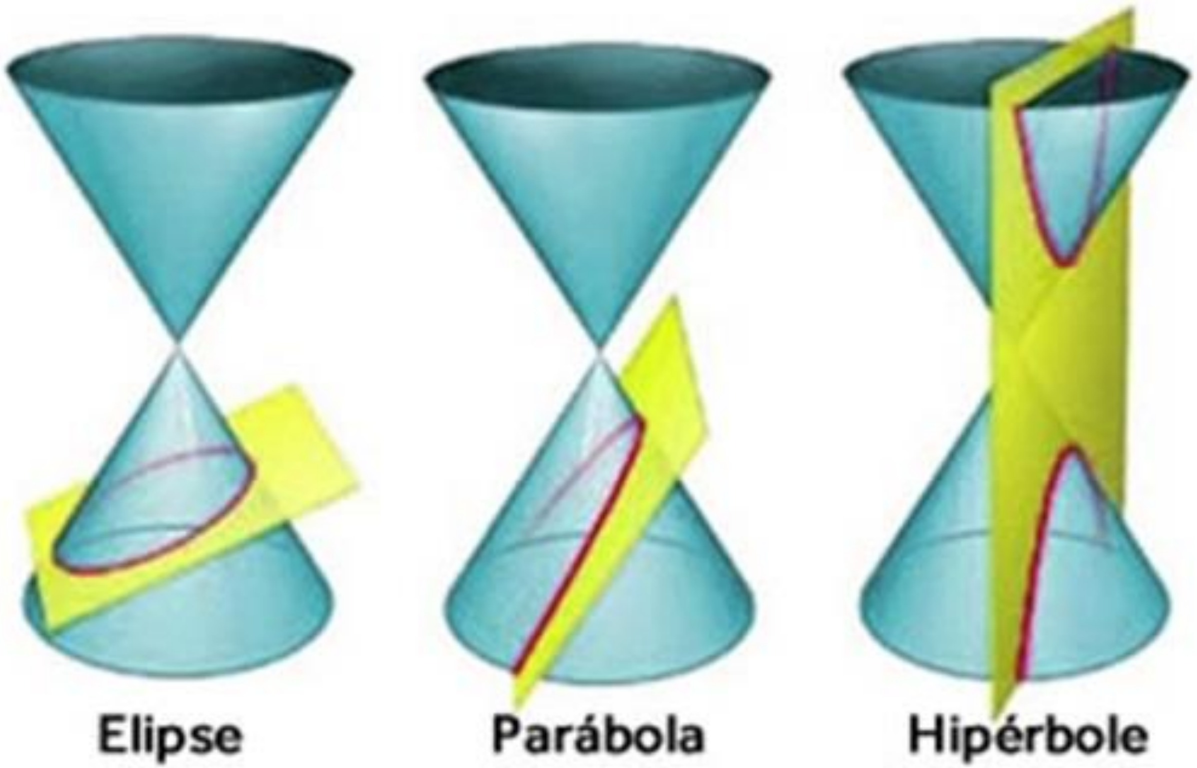
$$d \approx \frac{19}{3,61}$$

$$d \approx 5,27$$

$d \approx 5,27$
$r = 5$
Logo: $d > r$
Reta exterior

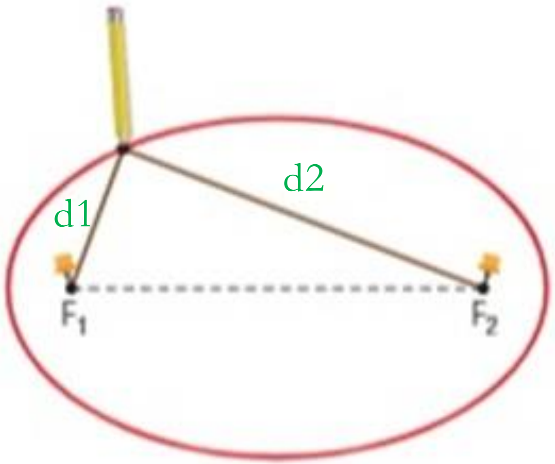
Estudo das Cônicas

As cônicas são curvas obtidas de seções produzidas em um cone ou dois cones invertidos.



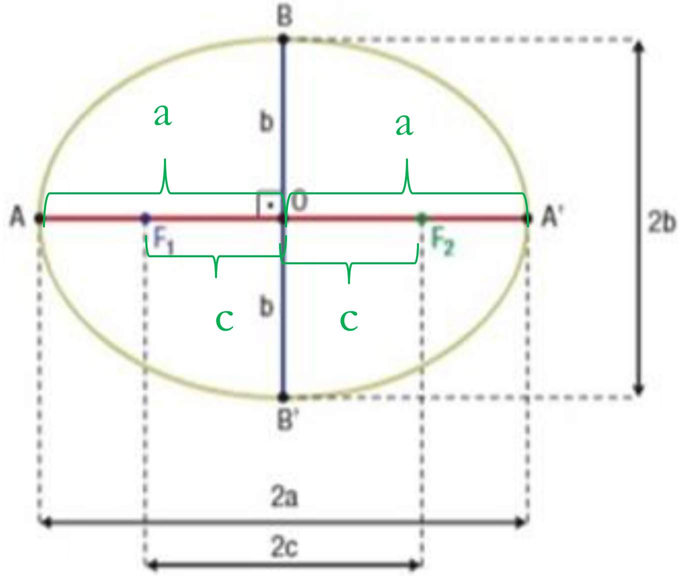
Elipse

Elipse é uma curva plana formada por todos os pontos do plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos dados (focos) é constante e igual a 2a.



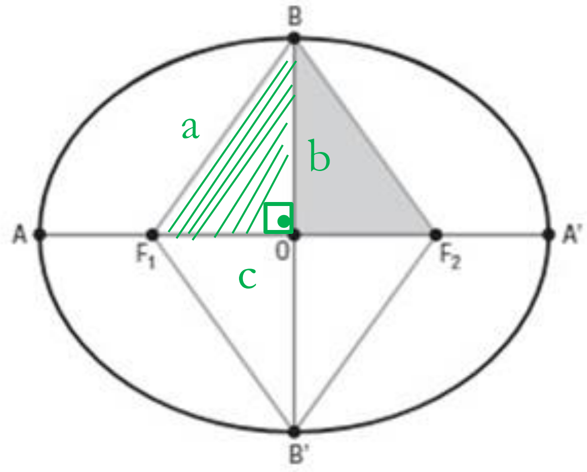
d1 + d2 = 2a

Características da Elipse



Elementos da elipse:

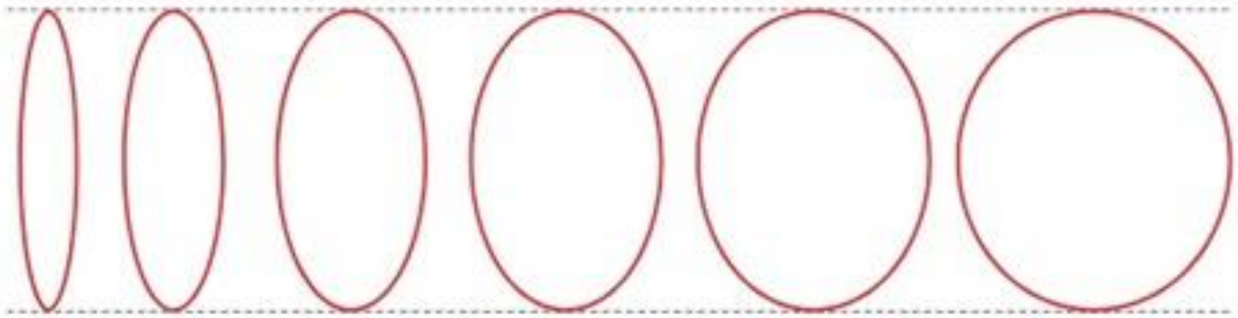
- F_1 e F_2 → focos;
- O → centro;
- $\overline{AA'}$ → eixo maior;
- $\overline{BB'}$ → eixo menor.
- A distância entre F_1 e F_2 é chamada de **distância focal** é igual a 2c.
- O eixo maior mede 2a, e o eixo menor, 2b.



Excentricidade

Em uma elipse, a excentricidade é o número e obtido pela razão: $e = \frac{c}{a}$

A excentricidade é um número real maior do que 0 e menor do que 1.



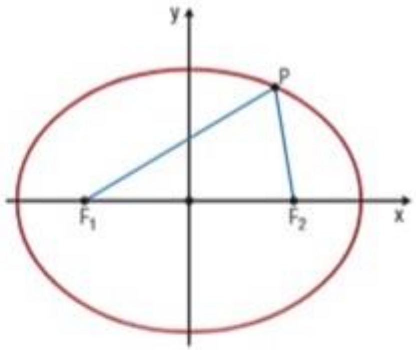
Equação da Elipse

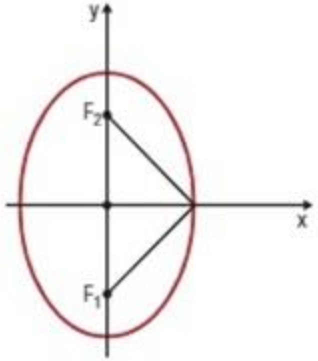
A equação reduzida da elipse com centro na origem e focos no eixo x do plano cartesiano é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, se os focos da elipse estivessem sobre o eixo y e o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas, sua equação reduzida seria:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

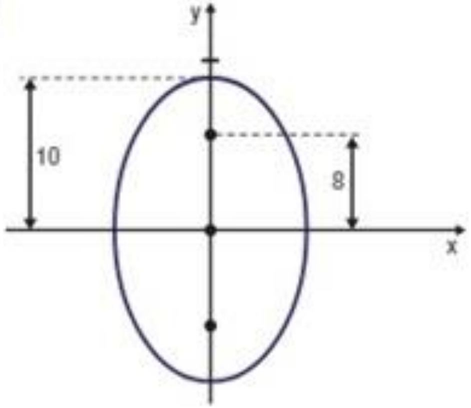




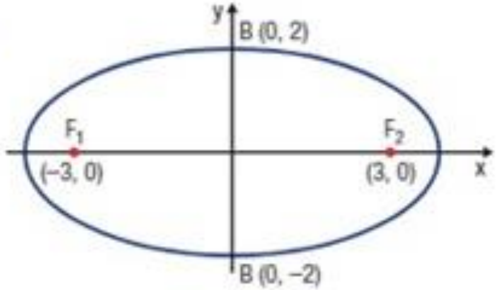
Exemplo

Determine a equação reduzida de cada uma das elipses:

a)



b)



a) $a = 10$

$c = 8$

$b = ?$

$a^2 = b^2 + c^2$

$10^2 = b^2 + 8^2$

$b^2 = 100 - 64$

$b^2 = 36$

$b = \sqrt{36}$

$b = 6$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{10^2} + \frac{x^2}{6^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{36} = 1}$$

b) $c = (3, 0) \rightarrow c = 3$

$b = (0, 2) \rightarrow b = 2$

$a = ?$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 2^2 + 3^2$

$a^2 = 4 + 9$

$a^2 = 13$

$a = \sqrt{13}$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{13})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

Exercicios

1) Considere o ponto A(-3, 5) e a circunferência de equação geral $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 31 = 0$. Determine a posição desse ponto em relação à circunferência.

Encontrar C e r

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 31 = 0$

$-2a = -2$

$a = 1$

$-2b = 6$

$b = -3$

$a^2 + b^2 - r^2 = -31$

$1^2 + (-3)^2 - r^2 = -31$

$-r^2 = -31 - 1 - 9$

$-r^2 = -41 \quad *(-1)$

$r^2 = 41$

$r = \sqrt{41}$

$\boxed{C(1, -3) \quad r = \sqrt{41}}$

Encontrar distância de A à C

$d_{ac} = \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2}$

$d_{ac} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5 - (-3))^2}$

$d_{ac} = \sqrt{16 + 64}$

$d_{ac} = \sqrt{80}$

$d_{ac} = \sqrt{80}$

$r = \sqrt{41}$

Logo: dac > r

Ponto A é exterior

Exercicios

2) Uma elipse de excentricidade $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tem eixo menor medindo 10 cm. Nessas condições, obtenha o comprimento do eixo maior e a distância focal.

$2b = 10 \rightarrow b = 5$

$2a = ?$

F1 até F2 $\rightarrow 2c = ?$

$e = \frac{c}{a}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}$

$2c = \sqrt{2}a$

$c = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 5^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$

$a^2 = 25 + \frac{2a^2}{4}$

$a^2 = 25 + \frac{a^2}{2}$

$a^2 - \frac{a^2}{2} = 25$

$\frac{2a^2 - a^2}{2} = 25$

$a^2 = 50$

$a = \sqrt{50}$

$a = 5\sqrt{2}$

$2a = ?$

$2a = 2*5\sqrt{2}$

$2a = 10\sqrt{2}$

$\boxed{\text{Eixo Maior} = 10\sqrt{2}}$

$2c = ?$

$c = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

$c = \frac{\sqrt{2}*5\sqrt{2}}{2}$

$c = \frac{5*\sqrt{4}}{2}$

$c = \frac{5*2}{2}$

$c = \frac{10}{2}$

$c = 5$

Logo: $2c = 2*5$

$2c = 10$

$\boxed{\text{Distância focal} = 10}$

- Assista o vídeo com a explicação da matéria;
- Os exercícios deverão estar prontos no caderno;
- Não precisa copiar a explicação, se desejar, faça um resumo;
- Não fique com dúvidas, entre em contato pelo Whatsapp: (21) 9 9461-3788 ou por email: camillamat96@gmail.com.

Bons Estudos!